

Datasimulering basert på matematiske modeller

Ivar Stefansson



Lærernes
dag 2025

Del I – Hvordan vi jobber med
matematisk modellering og
datasimulering

Del II – Inspirasjon til
problemløsning, modellering og
simulering i skolen



Lærernes
dag 2025

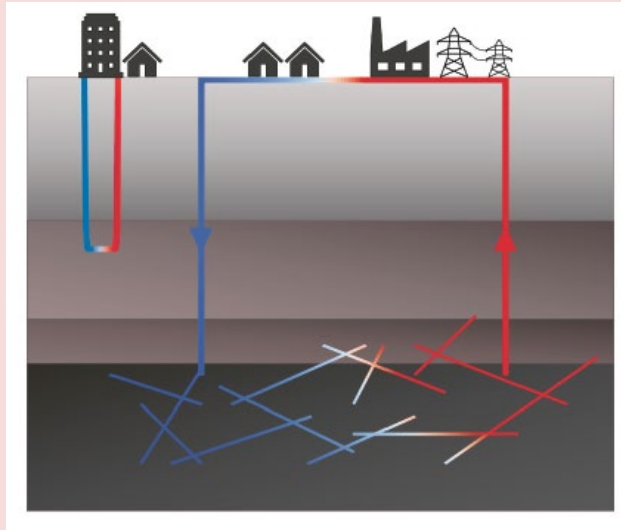
Anvendt og beregningsorientert matematikk

1. Definér et problem/spørsmål og sett opp antagelser
2. Formuler fysikken som matematisk modell (ligninger)
3. Oversett fra få vanskelige til mange lette ligninger
4. Skriv kode som lar datamaskiner beregne løsningen
5. Kjør simuleringer



Lærernes
dag 2025

Eksempel: Geotermisk energi



- Hent opp varmeenergi fra berggrunnen ved hjelp av oppvarmet væske
- Forskningsspørsmål:
 - Hvordan flyter væsken gjennom berggrunnen?
 - Hvor mye varme transporteres?
 - Hvordan påvirkes berggrunnen?
 - Hvilken rolle spiller sprekker?



Eksempelmodell

Massebevaring for usammentrykkbar væske

$$\nabla \cdot u = q$$

Hvis væsken flyter «rolig» gjelder Darcys lov

$$u = -K\nabla p$$

Vi kan nå sette sammen til “trykklikningen”

$$-\nabla \cdot K\nabla p = q$$

u væskefluks

q væskekilde

K permeabilitet,

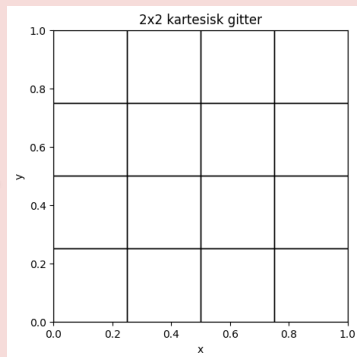
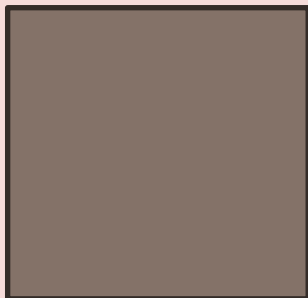
«gjennomstrømbarhet»

p trykk



Lærernes
dag 2025

Diskretisering



diskré, diskre, diskret_I

ADJEKTIV

Vis bøyning ▾

UTTALE diskreˈ

OPPHAV gjennom *latinske* 'skille mellom';
diskret (II)

BETYDNING OG BRUK

1. som vet å holde på en
taktfull, forsiktig

Eksempel

et *diskré* vink
hun var *diskré* og *diskret* i spørsmål

- brukt som adverb
holde seg diskre i bakgrunnen

2. dempet, moderat

diskret_{II}

ADJEKTIV

Vis bøyning ▾

OPPHAV av engelsk *discrete*; samme opprinnelse som diskré

BETYDNING OG BRUK

tydelig adskilt;
distinkt

FASTE UTTRYKK

diskrete data
data som blir representert med tegn



Lærernes
dag 2025

Diskret massebevaring

Endelige volumer:

- Bevaringslov for hvert kontrollvolum, der overflateintegralet er en sum av arealvektede kantflukser

$$\int_O u \cdot n \, dO = \sum u_k A_k = q_i$$

- Tilnærm hver kantfluks ved å bruke trykkene i nabocellene

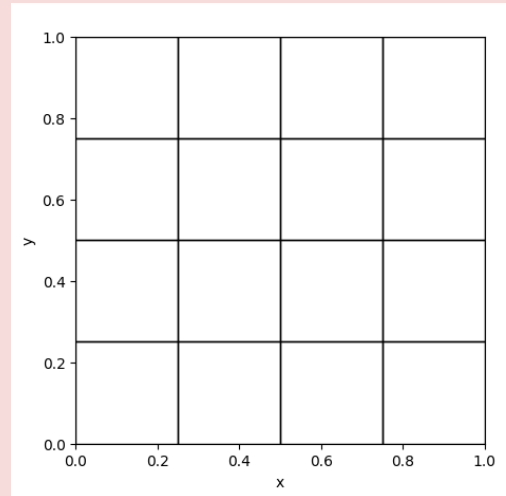
$$u_k \approx t_k (p_i - p_j)$$

- t_k er gjennomstrømningsvekten for kant k mellom celle i og j og beregnes fra cellegeometri og berggrunnens permeabilitet

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= q \\ u &= -K \nabla p \end{aligned}$$

Divergensteoremet

$$\int_V \nabla \cdot u \, dV = \int_O u \cdot n \, dO$$



Kodeverktøy

- Åpen kode tilgjengelig på GitHub
- Funksjonalitet for å simulere multifysikkproblemer i oppsprukne porøse medier
- Muliggjør gradvis utvidelse og reproduksjon
- [pmgbergen/porepy: Python Simulation Tool for Fractured and Deformable Porous Media](https://pmgbergen/porepy)



Del I – Hvordan vi jobber med
matematisk modellering og
datasimulering

Del II – Inspirasjon til
problemløsning, modellering og
simulering i skolen



Lærernes
dag 2025

Hva er spørsmålet?

- Modellvalg avhenger av hva man prøver å finne ut av
- Også for kodetesting:
 - Hva skal denne koden gjøre? (dokumentér!)
 - Test at den gjør det!



https://github.com/lvarStefansson/laerernes_dag

```
def legg_til_to(a):
    """Funksjon som legger til to til input."""
    return a + 2

def legg_til_to_med_feil(a):
    """Funksjon som legger til to til input, men med feil i funksjonen."""
    return 2

def test_at_funksjon_legger_til_to(f):
    """Tester funksjonen legg_til_to."""
    assert f(2) == 4, "2 + 2 skal bli 4"
    assert f(3) == 5, "3 + 2 skal bli 5"

test_at_funksjon_legger_til_to(legg_til_to)
test_at_funksjon_legger_til_to(legg_til_to_med_feil)
```

42] ⓘ 0.0s

AssertionError Traceback (most recent call last)
Cell In[42], line 15
 12 assert f(3) == 5, "3 + 2 skal bli 5"
 14 test_at_funksjon_legger_til_to(legg_til_to)
--> 15 test_at_funksjon_legger_til_to(legg_til_to_med_feil)

Cell In[42], line 11
 9 def test_at_funksjon_legger_til_to(f):
 10 """Tester funksjonen legg_til_to."""
--> 11 assert f(2) == 4, "2 + 2 skal bli 4"
 12 assert f(3) == 5, "3 + 2 skal bli 5"

AssertionError: 2 + 2 skal bli 4

Hvor er feilen?

- For mer avansert koding er “avluseren” (debugger) blant de viktigste verktøyene.
- Stopper programmet underveis i stedet for å skrive ut verdier til terminalen.



Lærernes
dag 2025

KI?

- Kan automatisere enkel koding
- Kan også gjøre kompliserte oppgaver
- God på å forklare kode og finne feil

- Bruke KI rett eller stritte imot?



Lærernes
dag 2025

Eksempel - oppvarmingskostnad

Definér et problem/spørsmål	Hvor mye sparer vi på å ha varmepumpe?
Sett opp antagelser	Effektfaktoren til varmepumpen er kjent Strømpris gjennom vinteren er kjent Oppvarmingsbehov er kjent
Sett opp modelligninger	Spart beløp = installasjonskostnad – (beløp uten pumpe – beløp med pumpe) <i>detaljer neste side</i>
Diskretisér	Del opp i tidsintervaller (tidsdiskretisering) Skriv modelligninger på diskret form
Implementér	Skriv kode som svarer til diskrete ligninger
Kjør koden for gitte data	Strømpris og oppvarmingsbehov for hvert tidsintervall Effektfaktor og pris for varmepumpe
Tolk resultater/svar på spørsmålet	Se når man går i null Lag graf som funksjon av tid

Varmepumpemodell

- Spart beløp = installasjonskostnad
- (beløp uten pumpe – beløp med pumpe)

$$s = I - (b_u - b_m)$$

$$b_u = \int p * e_u dt$$

$$b_m = \int p * e_m dt = \int p * e_u / f dt$$

- Hvis oppvarmingsbehovet = e_u er kjent og f konstant er vi i mål.

Alternativ: Kjent temperatur T , og pris og varmebehov avhenger av T , f.eks.

$$e_u = H(T - T_{ref})$$

$$p = P(T - T_{ref})$$

s – spart beløp

I – installasjonskostnad

b_u, b_m - beløp uten/med pumpe

p – strømpris

e_u – effekt uten pumpe, samme som oppvarmingsbehovet

e_m - elektrisk effekt med pumpe

$f := \frac{e_m}{e_u}$ - effektfaktor

H – husfaktor (isolering etc.)

P – strømprisfaktor (grov tilnærming av temperaturavhengighet)

T_{ref} - referansetemperatur



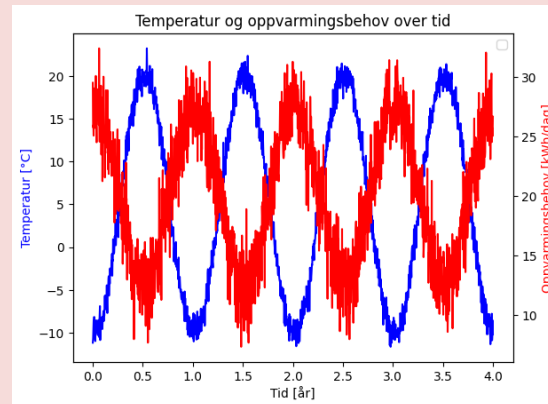
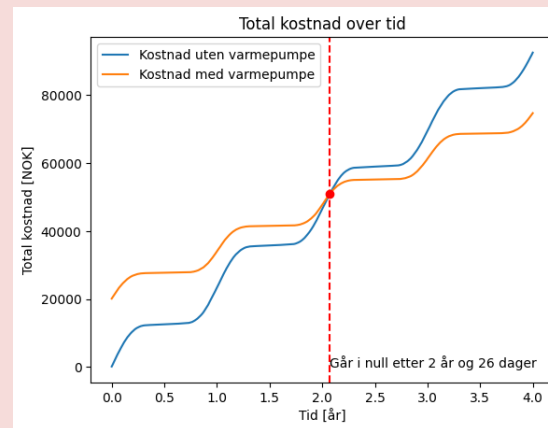
Lærernes
dag 2025

Kode og resultater



https://github.com/lvarStefansson/lærerens_dag

```
def temperatur(t):  
    # Kaldet ved t=0.1, dvs. slutten av januar.  
    årsfluktusjon = - 15 * np.cos(2 * np.pi * t - 0.1)  
    daglig_fluktusjon = np.random.randn(np.size(t))  
    return middeltemperatur + årsfluktusjon + daglig_fluktusjon  
  
def kostnad_uten_varmepumpe(oppvarmingsbehov, strømpris):  
    return np.cumsum(oppvarmingsbehov * strømpris)  
  
def kostnad_med_varmepumpe(oppvarmingsbehov, strømpris, cop):  
    return np.cumsum(oppvarmingsbehov * strømpris / cop)  
  
def temperaturavhengig_cop(temperatur):  
    """Temperaturavhengig COP (Coefficient of Performance) for en varmepumpe.  
  
    Parametere:  
    |   temperatur (array-like): Temperaturen i grader Celsius.  
  
    Returverdi:  
    |   array-like: COP for en varmepumpe basert på temperatur.  
    """  
    return 3 - 0.08 * np.maximum(0, 10 - temperatur)
```



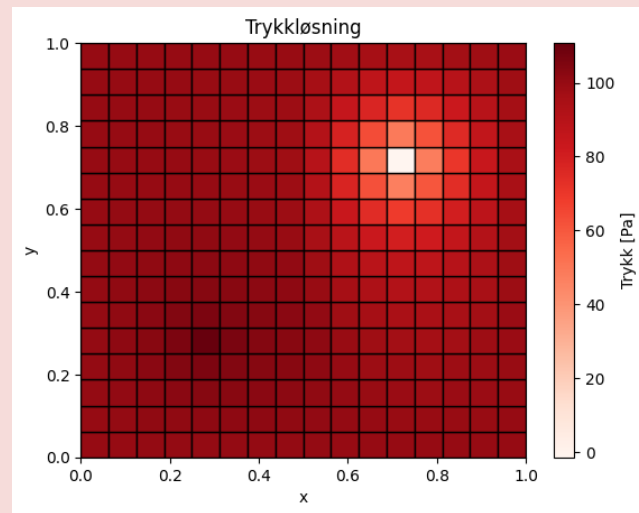
Eksempel – væskeflyt

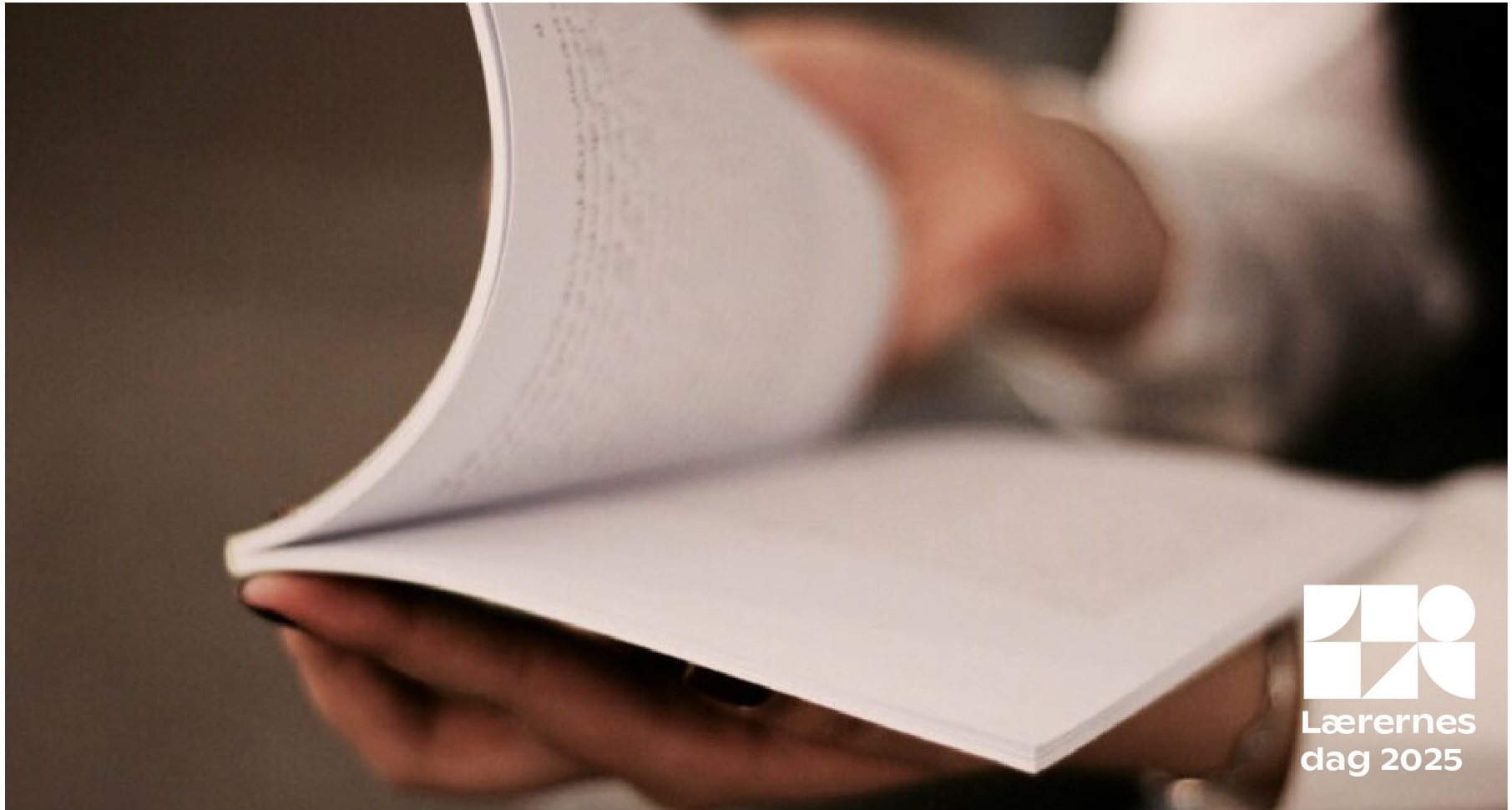
Definér et problem/spørsmål	Hvordan flyter væsken gjennom berggrunnen?
Sett opp antagelser	Trykkvariasjonen er lav nok til at væskens tetthet er konstant Strømningen er rolig (ikke turbulent) Berggrunnen har porer/sprekker som tillater flyt Berggrunnen endrer seg ikke Vi kjenner gjennomstrømbarheten/permeabiliteten
Sett opp modelligninger	Massebevaring Darcy's lov
Diskretisér	Diskret trykklikning To-punktstilmærming av gjennomstrømningsvekten t_k
Skriv koden	Kode som svarer til diskrete ligninger – vi bruker PorePy
Kjør koden for gitte data	Se eksempel neste side
Tolk resultater/svar på spørsmålet	Hva er trykket i injeksjonscellen? Plott trykket

Eksempelsimulering - væskeflyt

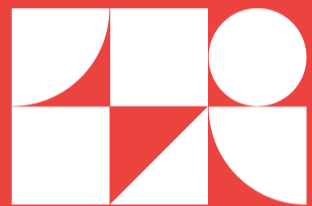
Kildeledd	Injeksjon cellen øverst til høyre ($q > 0$) Produksjon i cellen nederst til venstre ($q < 0$)
Randkrav	Spesifiser trykk eller fluks på randen. Her: $p_{rand} = 20$
Domene	Ofte et rektangel, her enhetskvadrat
Permeabilitet	Verdi for hver celle. Her: $K = 1$ på venstre side ($x < 0,5$), $K = 2$ på høyre side ($x \geq 0,5$)

```
import porepy as pp
... # Define the model parameters
model = pp.SinglePhaseFlow(model_params)
pp.run_time_dependent_model(model)
```





Lærernes
dag 2025



**Lærernes
dag 2025**