Utforskende oppgaver om polynomer med GeoGebra i VGS

Christoph Kirfel (UiB)

Lærernes dag UiB Bergen 2024

26. januar 2024

Utforskende oppgaver om polynomer med GeoGebra i VGS

Problemløsningsoppgaver kontra utforskende oppgaver

Løsningsprosessen

Problemløsningsoppgaver

1. Forstå problemet
2. Legge en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake

Utforskende oppgaver

1. Eksperimentere med materialet
2. Beskrive det man ser og eventuelt se mønstre og formulere hypoteser
3. Forklare hvorfor det skjer
4. Gå videre med utvidete spørsmål og eventuelt se sammenhenger med andre temaer

Hvor finner man gode utforskende oppgaver?

Del 1: **polynomer av tredje grad**.

- variasjon av parameterne
- karakteristiske punkter, linjer, arealer og forhold mellom størrelser (areal hører til R2 men mulig med GeoGebra)

Del 2 (hvis tid): utforskningsoppgave rundt **parabler,**

- eksperimenter med parameterne
- iaktta, beskrive og forsøke å forklare det de observerer.
- komme frem til hypoteser og muligens utvide oppgaven og stille egne spørsmål.

.

Eksperimentene med parameterne står i starten av arbeidsprosessen. Observasjonene under disse eksperimentene vil gi anledning til å formulere hypoteser som så kan behandles med algebra for å få avkreftende eller bekreftende svar og man kan gå videre til nye utfordringer.

Forberedelser

Starter med

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

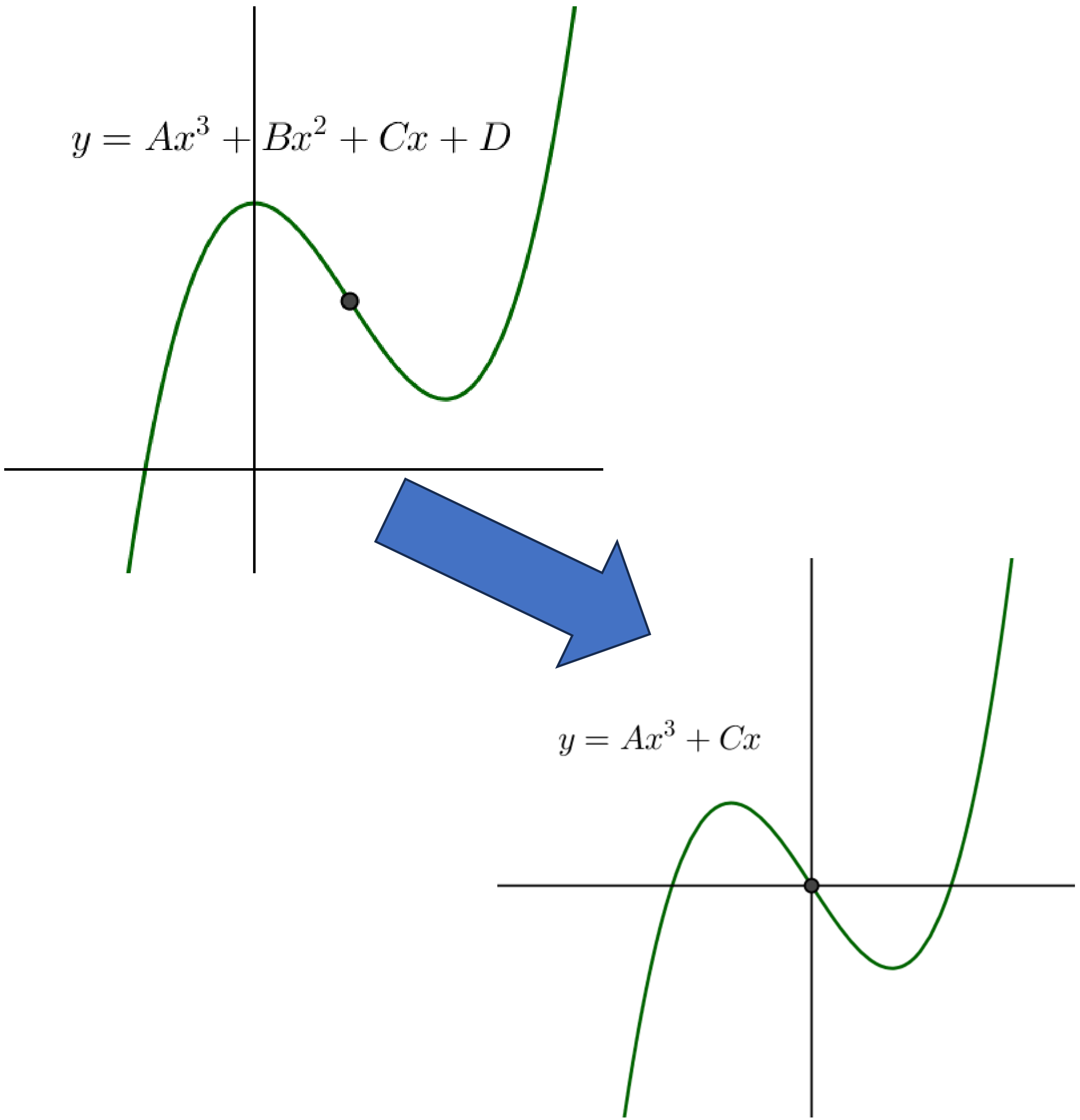
Vendepunkt til origo:

Da er d$=0$ og

$y'' = 6ax + 2b = 0$

for $x = 0$, altså b$=0$.

$$y = ax^3 + cx$$



Forberedelser

Kurven skal ha ekstremalpunkter:

$y' = 3ax^2 + c = 0$ har **to** løsninger, altså

$$x^2 = -\frac{c}{3a} > 0 \text{ dvs. c og a har forskjellig fortegn.}$$

Gitt et tredjegradspolynom med ekstremalpunkter på formen

$$y = ax^3 + cx.$$

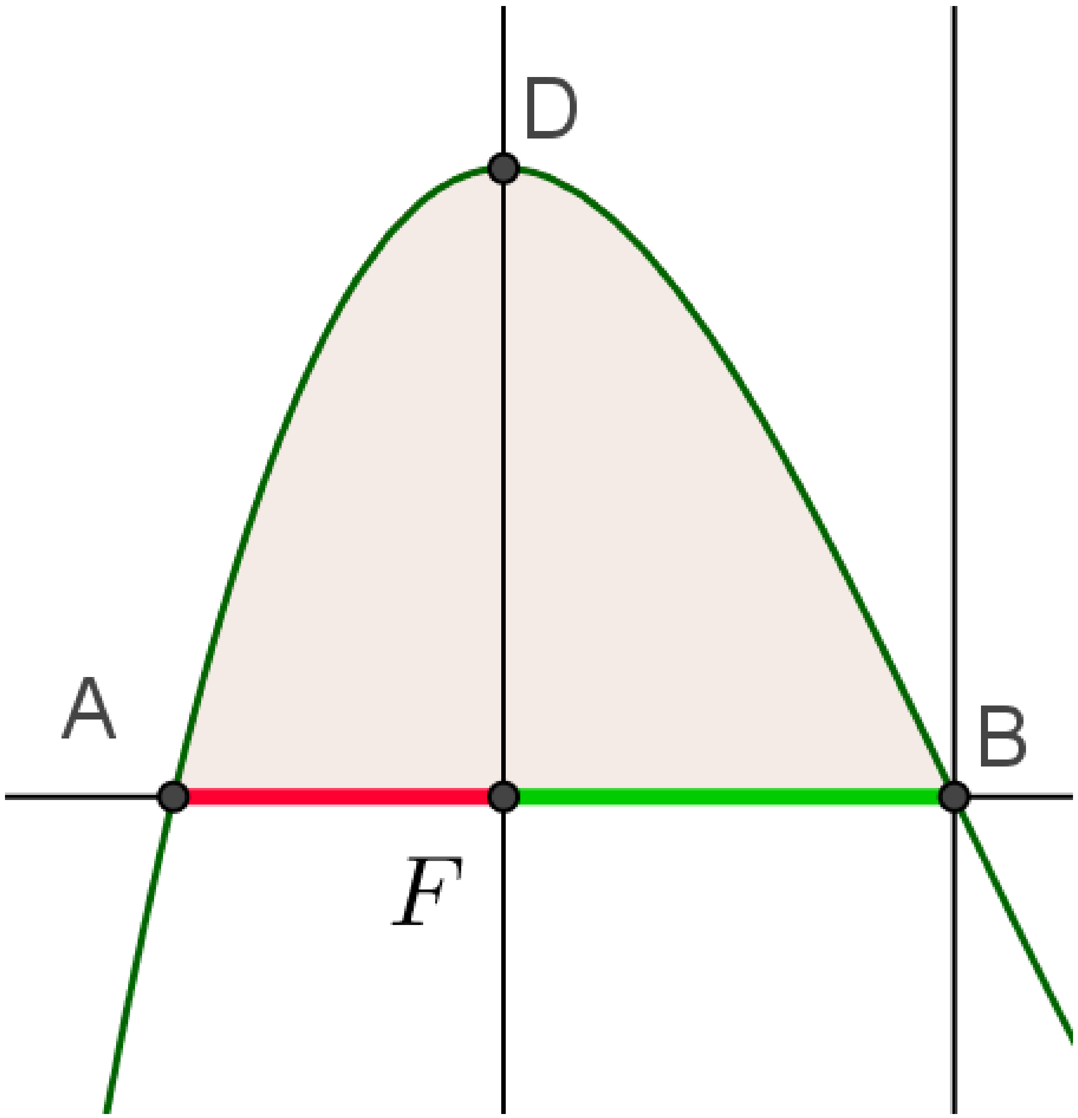
Vi betrakter nå forskjellige karakteristiske punkter, linjer, arealer og forhold mellom størrelser ved disse tredjegradspolynomene og ønsker å finne ut hvilken effekt variasjon av parameterne a og c har på disse karakteristiske egenskapene.

Oppgave 1

Maksimalpunktet kaller vi D.

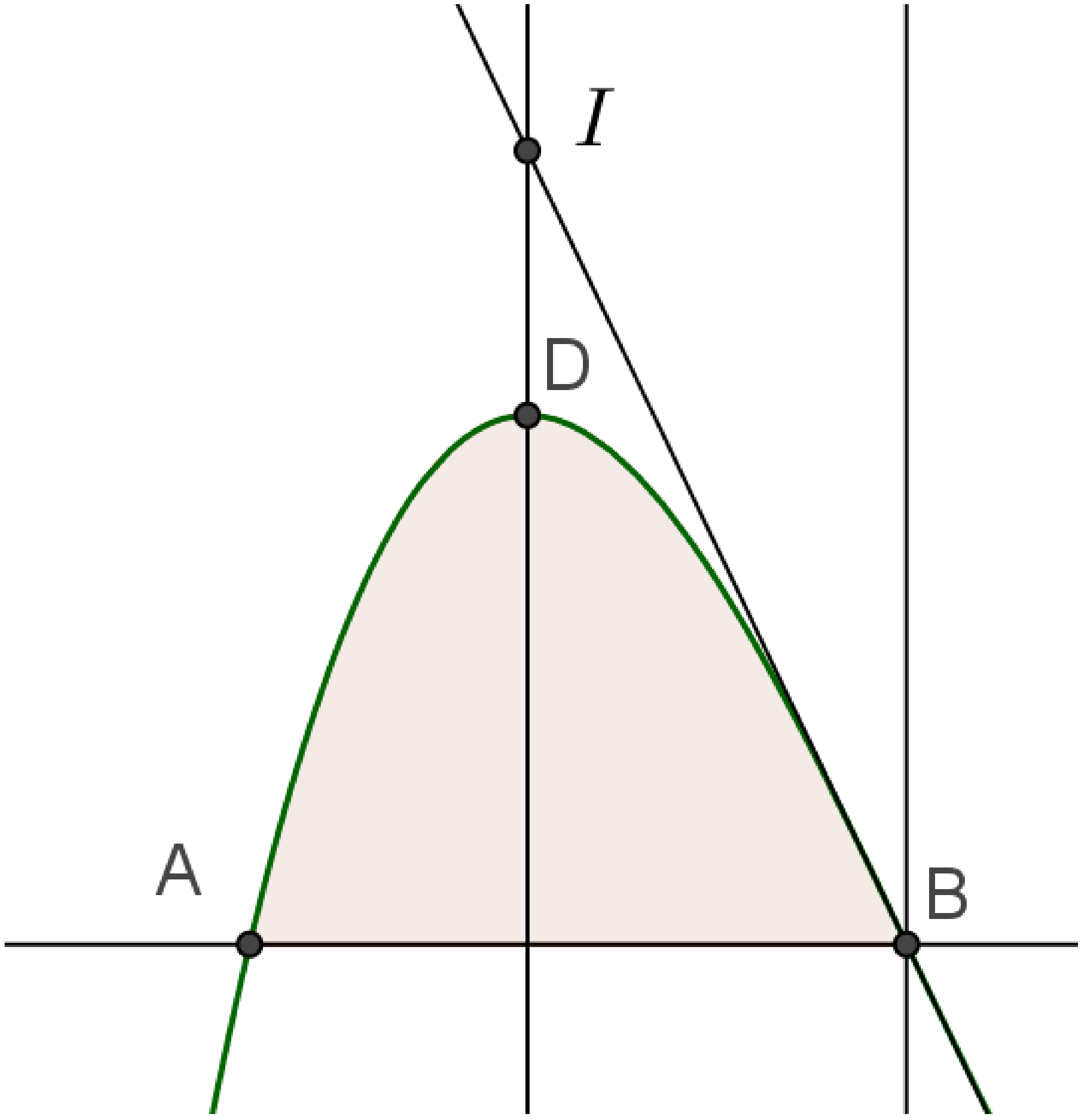
Fotpunktet under D på *x*-aksen kaller vi F. Dette punktet F deler linjestykket mellom nullpunktet A og origo i to deler.

Finn forholdet mellom disse delene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



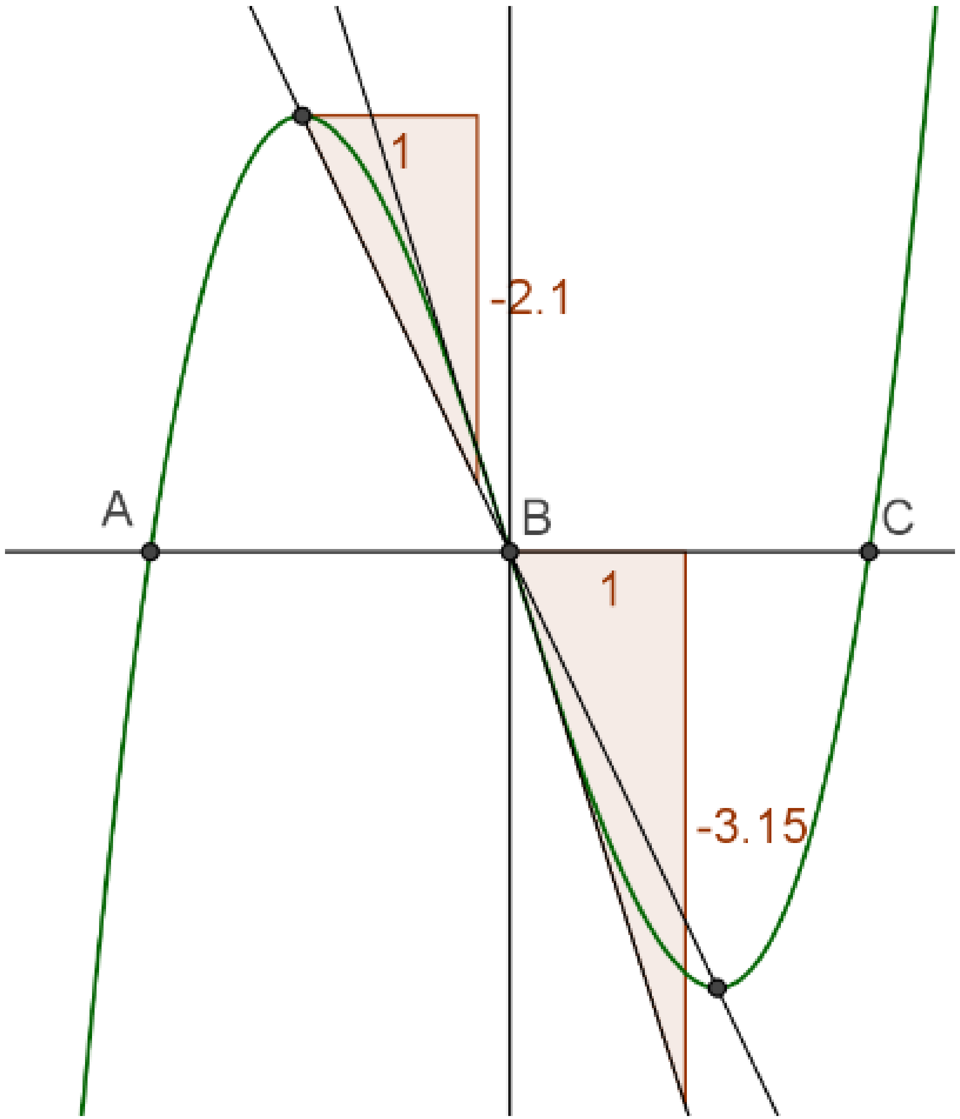
Oppgave 2

Maksimalpunktet kaller vi igjen D. Vendetangenten skjærer loddlinjen gjennom D i punktet I. Finn forholdet mellom y-verdiene til I og D! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



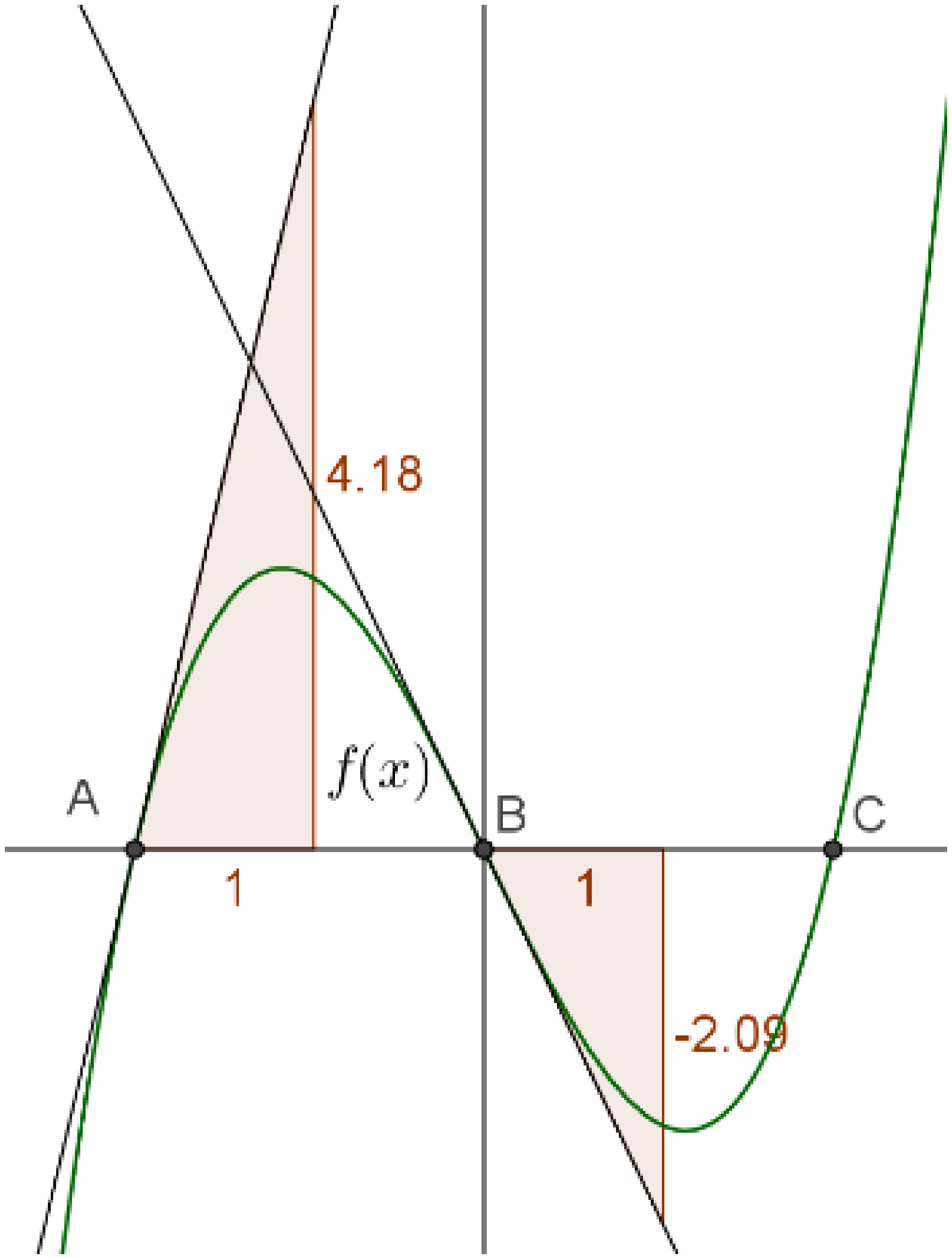
Oppgave 3

Finn forholdet mellom stigningstallene til vendetangenten og ekstremalpunkt-forbindelsen for en tredjegradskurve. Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



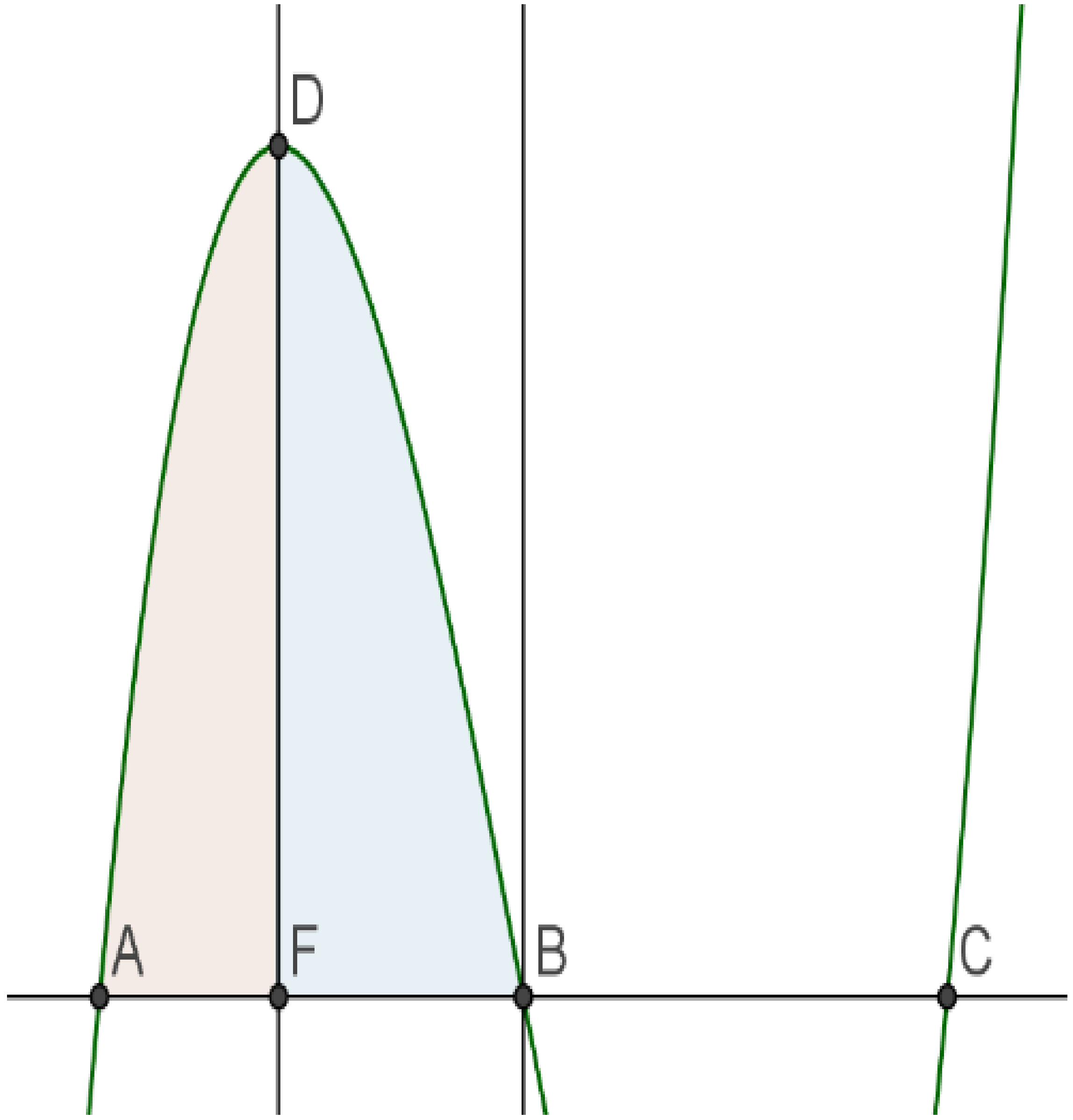
Oppgave 4

Sammenlikn stigningstallet for tangenten i de «ytre» nullpunktene med vendetangentens stigningstall. Hva skjer når man varierer a eller c?



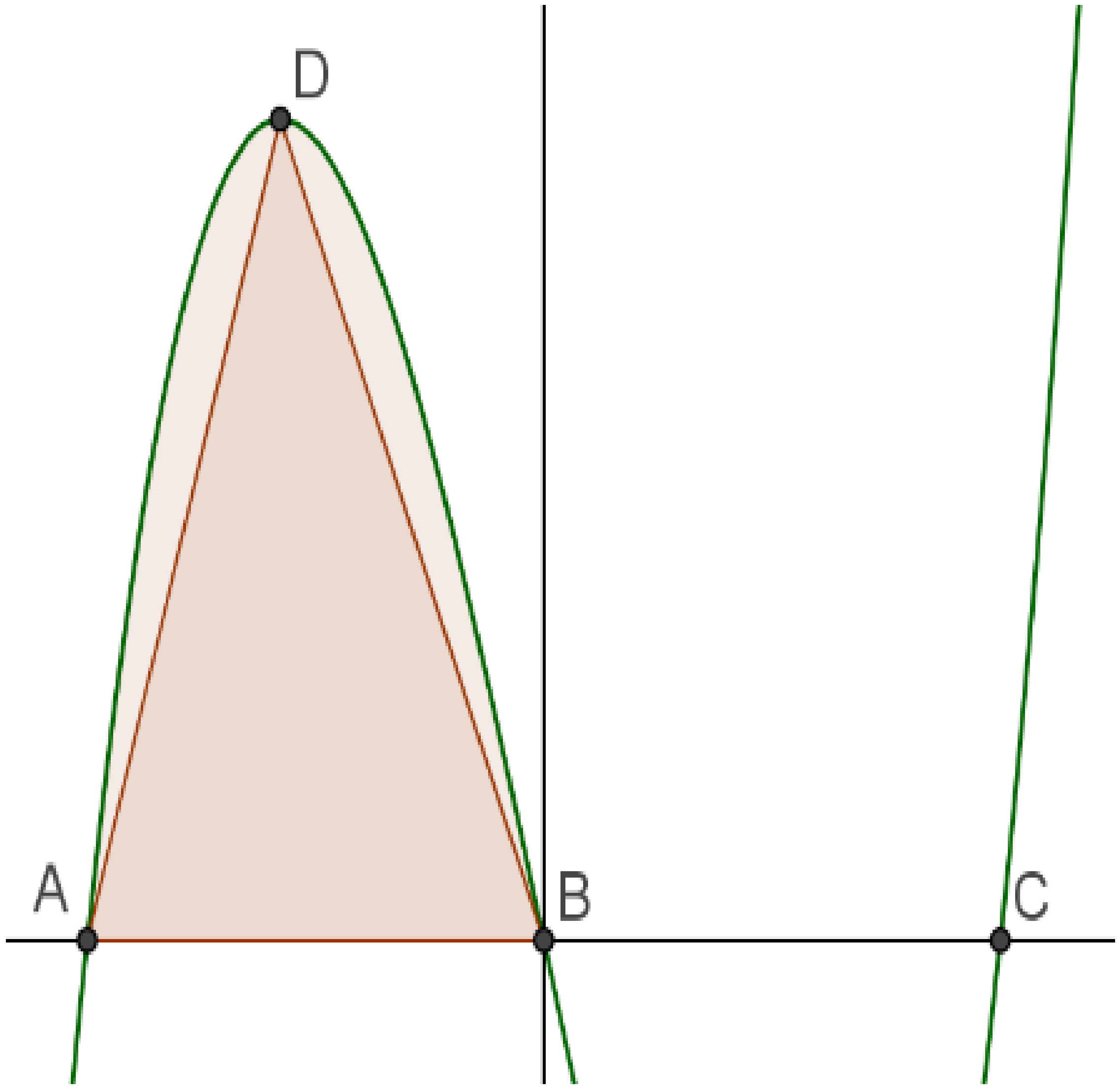
Oppgave 5

Arealet under kurven fra det venstre nullpunkt A frem til origo deles i to deler gjennom en loddrett linje (parallell med y-aksen) gjennom ekstremalpunktet D. Finn arealforholdet mellom disse delene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



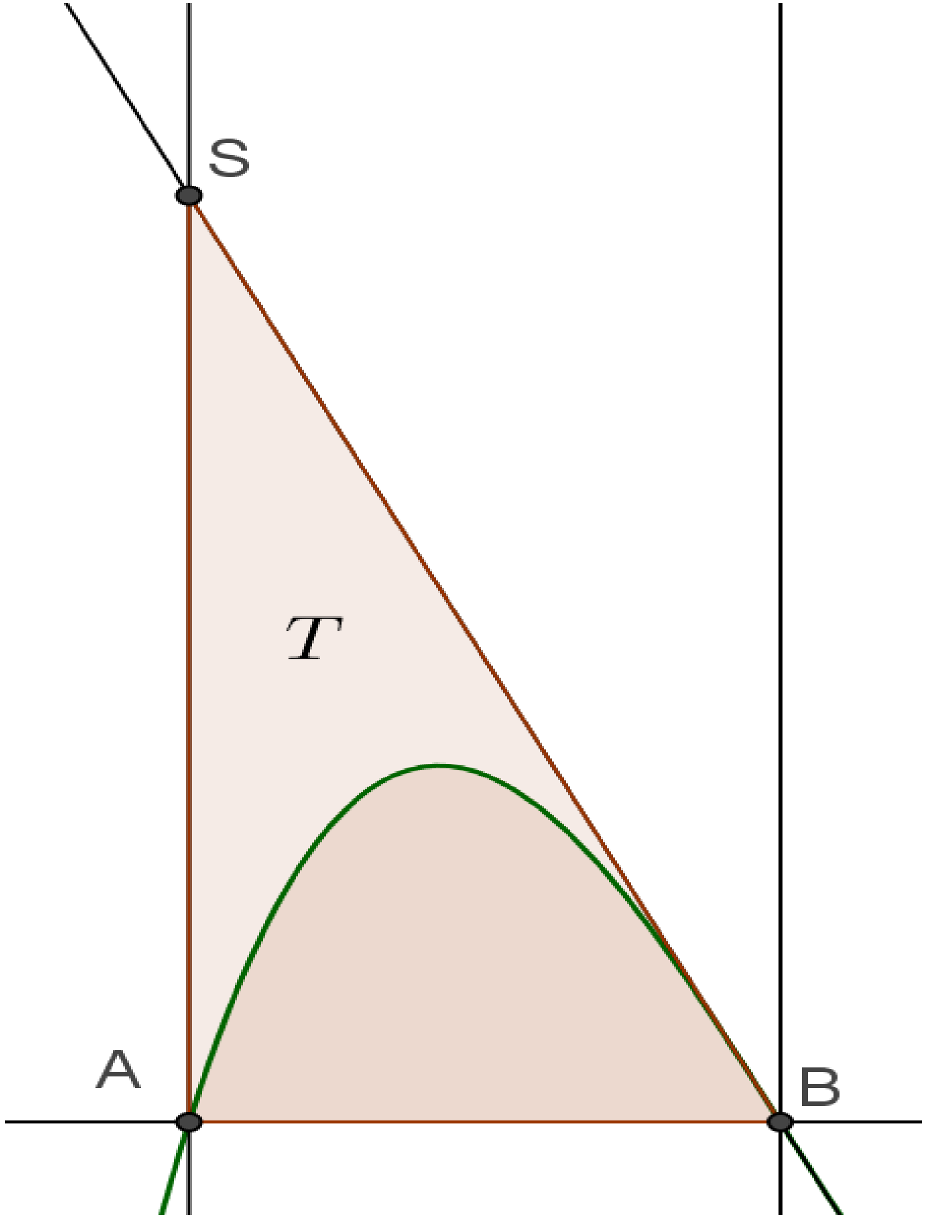
Oppgave 6

Arealet under kurven fra det venstre nullpunktet frem til origo sammenliknes med arealet av en trekant der hjørnene er: Venstre nullpunkt A, origo B og ekstremalpunktet D mellom disse. Finn dette arealforholdet! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



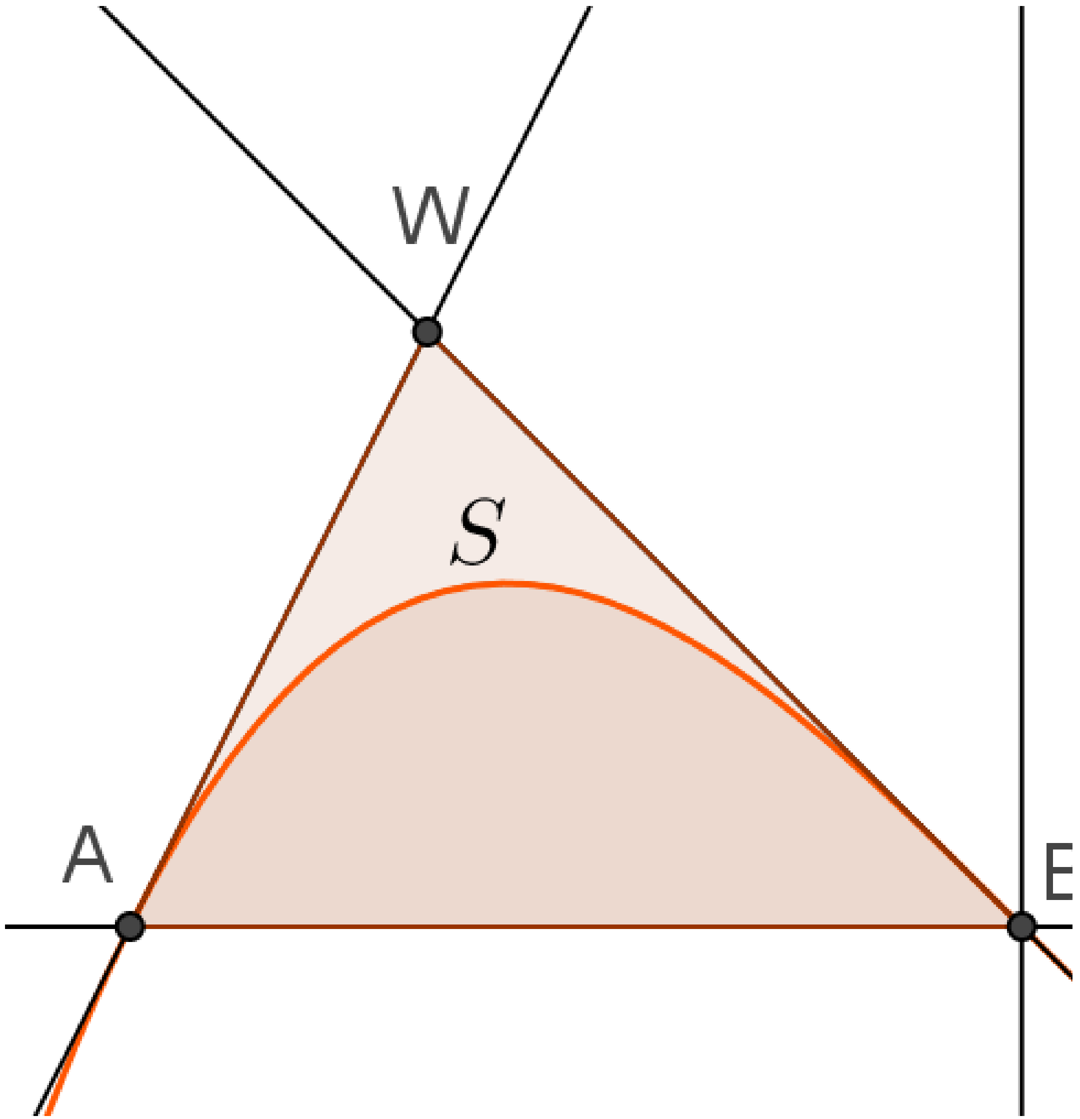
Oppgave 7

Trekanten T dannes av x-aksen, loddlinjen i nullpunktet A og vendetangenten. Trekantarealet sammenliknes nå med arealet under kurven mellom A og origo. Finn forholdet mellom disse arealene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



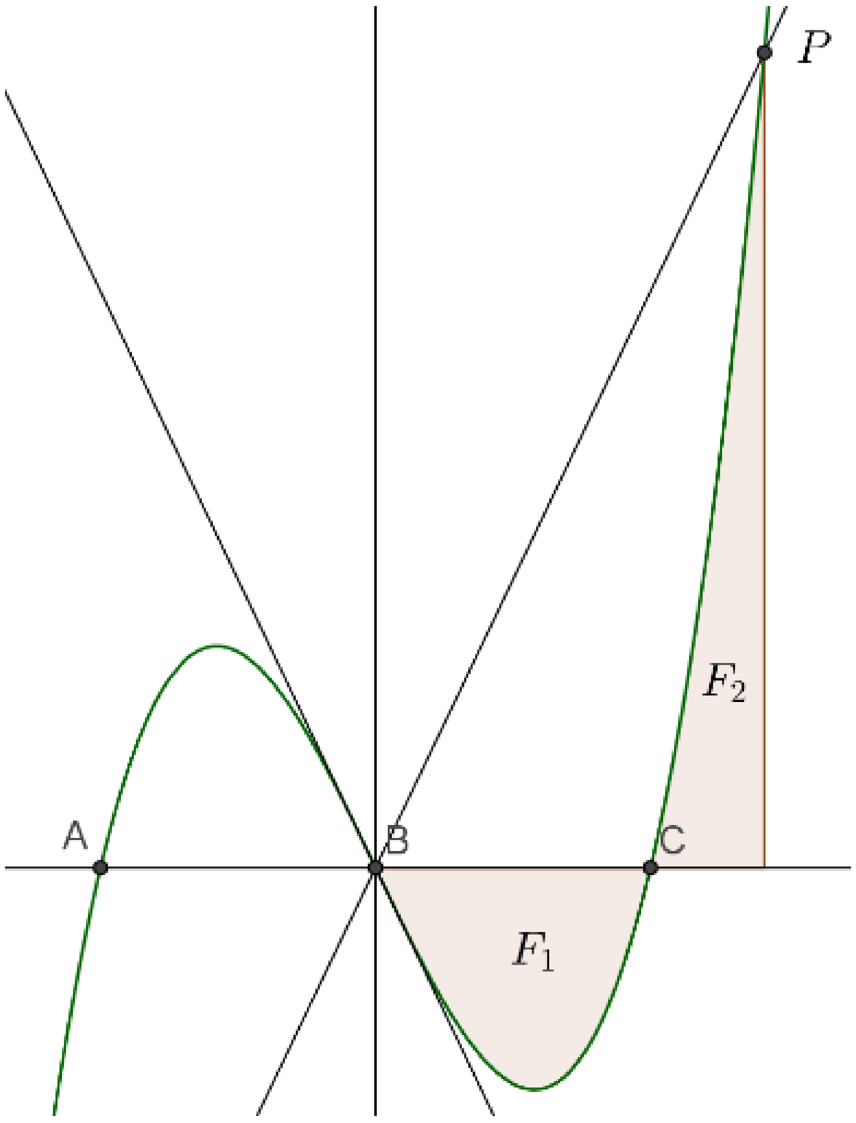
Oppgave 8

Trekanten S dannes av x-aksen vende-tangenten og nullpunktstangenten gjennom A. Sammenlikn trekantarealet med arealet under kurven mellom nullpunktet og origo. Finn forholdet mellom disse arealene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller c?



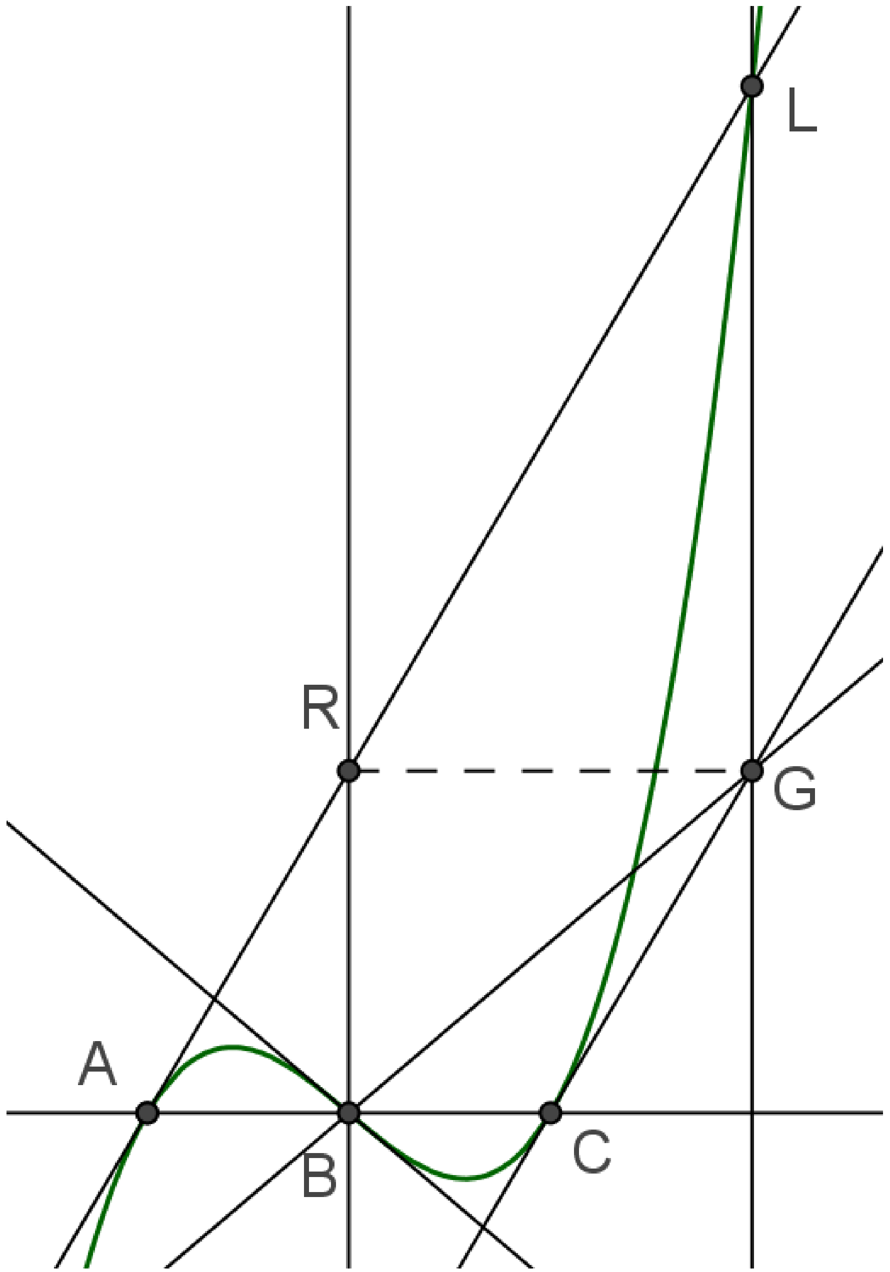
Oppgave 9

Speil vendetangenten i y-aksen. Den speilete vendetangenten skjærer kurven i et nytt punkt P. Finn integralet fra origo til x-verdien til P. Hva er forholdet mellom arealet F_1 og arealet F_2. Hvordan endrer dette seg når man varierer a eller c?



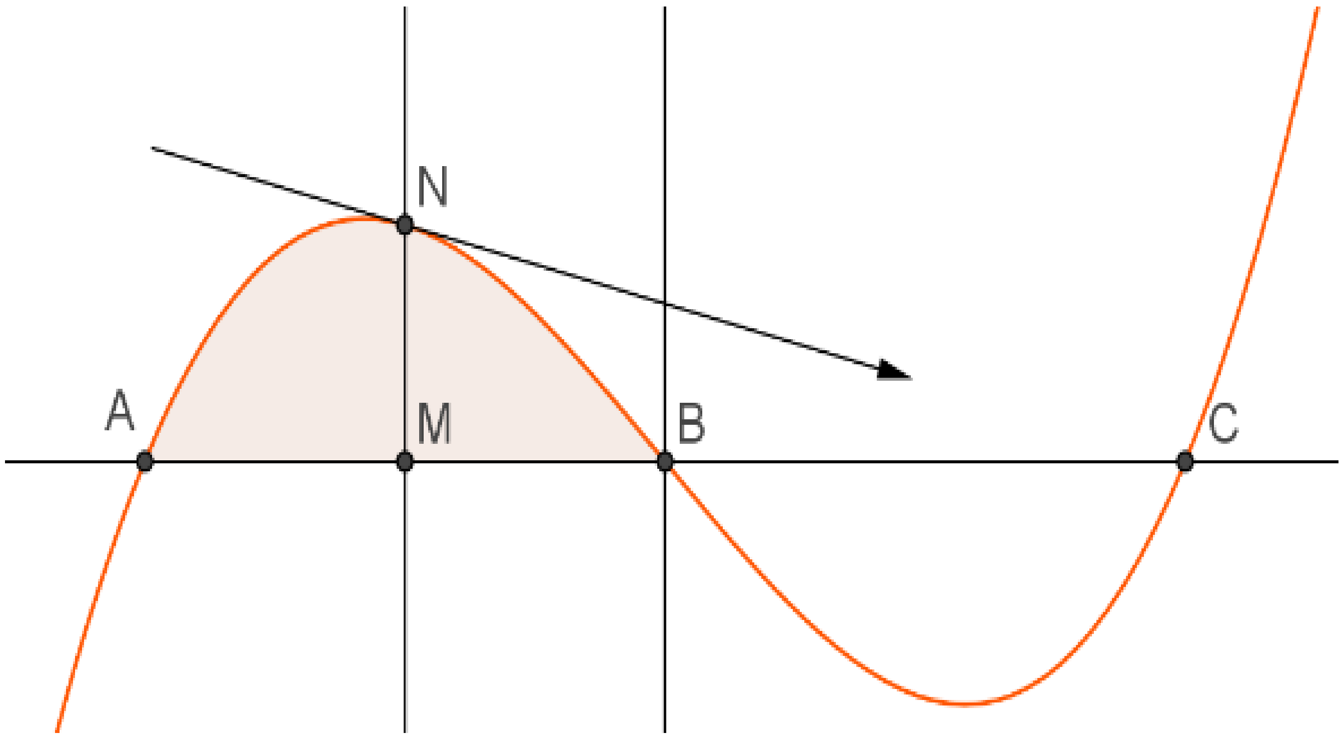
Oppgave 10

Nullpunkttangenten gjennom A skjærer kurven i punktet L og y-aksen i punktet R. Den speilte vendetangenten skjærer nullpunkttangenten gjennom C i punktet G. Hvordan ligger G i forhold til R og L? Hvordan endrer dette seg når man varierer a eller c?



Oppgave 11

Finn midtpunktet M mellom nullpunktene A og origo og det tilhørende kurvepunktet N loddrett over M. Undersøk tangenten gjennom N. Hvor treffer denne tangenten x-aksen? Hva skjer om du endrer a eller c? (Denne oppgaven fikk vi av Hans Bie Lorentzen.)



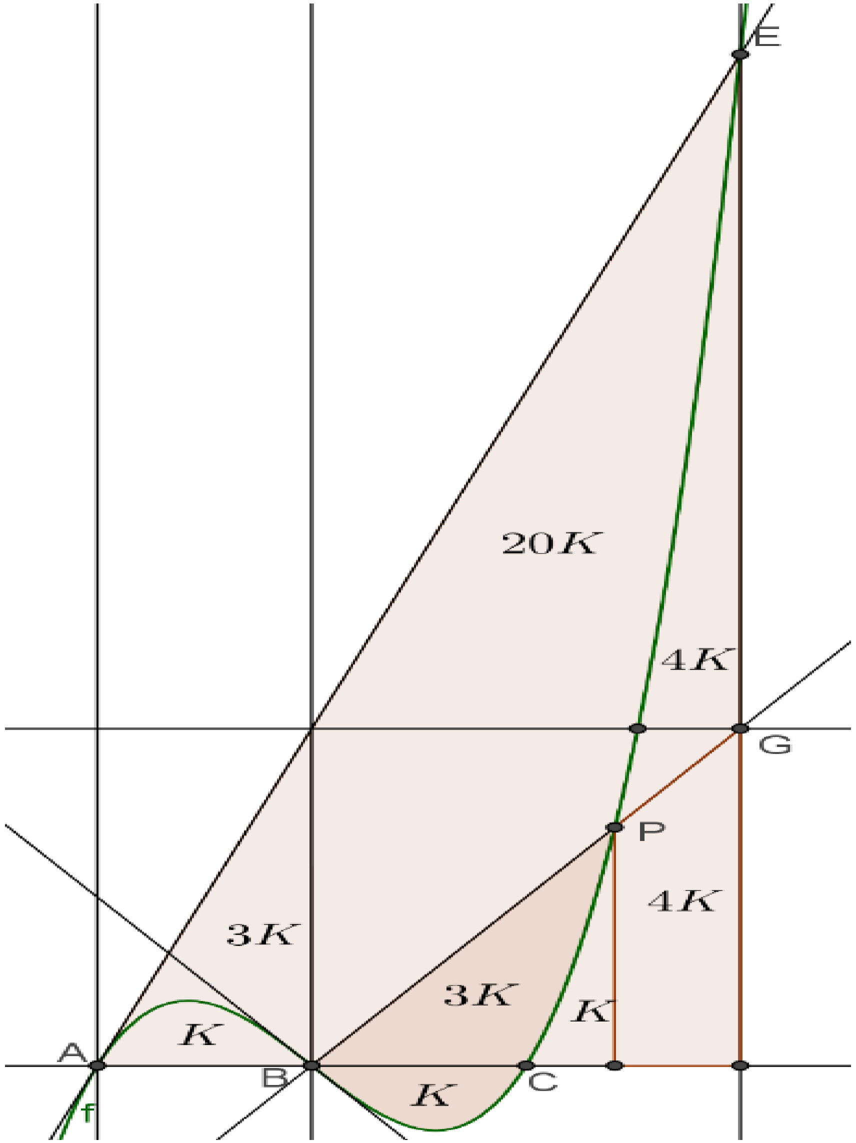
Løsning for oppgave 3

- Kurven $y = ax^3 + cx$ og dermed er $y' = 3ax^2 + c$.
- Ekstremalpunktene: $y' = 0$, altså $3ax^2 = -c$ eller $x_{1,2} = \mp\sqrt{-c/(3a)}$ med tilhørende
- y-verdier $y_{1,2} = a\left(\pm\sqrt{-c/(3a)}\right)^3 + c\left(\pm\sqrt{-c/(3a)}\right) = \pm\frac{2c}{3}\sqrt{-c/(3a)}$.
- Stigningstallet til ekstremalpunktsforbindelsen er dermed
- $m_e = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{2c\sqrt{-c/(3a)}}{3} + \frac{2c\sqrt{-c/(3a)}}{3}}{\sqrt{-c/(3a)} + \sqrt{-c/(3a)}} = \frac{2c}{3}$.
- For vendetangenten får vi stigningstallet $m_v = y'(0) = c$ og forholdet mellom stigningstallene er konstant $\frac{m_v}{m_e} = \frac{3}{2}$.

10 kriterier for Inquiry Based Mathematics Education (Morten Blomhøy og Michèle Artigues)

Conceptualizing inquiry-based education in mathematics

- the ‘authenticity’ of questions and students’ activity in terms of connection with students’ real life and link with out-of-school questions and activities;
- the epistemological relevance of the questions from a mathematical perspective, and the cumulative dimension of mathematics;
- the progression of knowledge as expressed in the curriculum;
- extra-mathematical questions and the modelling dimension of the inquiry process;
- the **experimental dimension** of mathematics;
- the development of problem-solving abilities and inquiry habits of mind;
- the autonomy and responsibility given to students, from the formulation of questions to the production and validation of answers;
- the guiding role of the teacher and teacher–student(s) dialogic interactions;
- the collaborative dimension of the inquiry process;
- the critical and democratic dimensions of IBME.


E
20K
4K
G
P
4K
3K
3K
K
K
A
B
K
C
f